問 1. 次の連立方程式の解が無限個存在するときの a, b を求めよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & a & -1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & a-2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$$

問 2. 実数から実数への連続関数 $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$ を考える。

関数 f が連続関数であるとは、任意の点 $a \in \mathbb{R}$ で連続であることである。関数 f が点 $a \in \mathbb{R}$ で連続であることは、次のように (いわゆる ε-δ 論法で) 特徴づけられる:

$$\text{任意の正の数}\varepsilon\text{に対して、正の数}\delta\text{が存在し、}|x-a|<\delta\text{ならば }|f(x)-f(a)|<\varepsilon\text{が成り立つ。} \tag{*}$$

一方、連続関数 f は「任意の開集合の f による逆像が開集合である」と位相的に特徴づけることもできる。ここで、$\mathbb{R}$ の部分集合 O が開集合であるとは、任意の点 $x \in O$ に対してある正の数 ε が存在し、開区間 $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ が O の部分集合となることである。また、集合 $S \subset \mathbb{R}$ の f による逆像 $f^{-1}(S)$ は、

$$f^{-1}(S) := \{x \in \mathbb{R} | f(x) \in S\}$$

で定義される。

ε-δ 論法の意味での連続関数と位相的な意味での連続関数が等価であること、

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ で } (*) \text{ が成り立つ} \ \Leftrightarrow\ \text{任意の開集合の } f \text{ による逆像が開集合である}$$

を示せ