学びの Tips 数学編 20 ver.2　2020 年 5 月

円周率、楕円積分、算術幾何平均

円周率 π とは、円周の長さが直径の何倍かを表す数です。π は代数方程式の解にならない超越数で、とても不思議な数です。π の近似値を求めることは、紀元前 2000 年頃の古代バビロニアに始まり、これまで様々な方法が提案されてきました。一方、楕円積分は楕円の周の長さを求める際に現れる積分で、自然科学や工学の様々な分野と関係があります。また、算術幾何平均は相加相乗平均とも呼ばれ、高校からなじみのあるものです。今回の Tips では、円周率、楕円積分、算術幾何平均の間に成り立つ美しい公式を紹介します。そして、その公式を用いた、現在知られている円周率の最速の計算法である算術幾何平均を用いた方法について紹介します。

1　楕円の周の長さと完全楕円積分

$0 < p < q$ に対して、

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1$$

で定まる楕円の弧の長さを求めます。第 1 象限にある弧の長さを ℓ とすると、楕円の弧の長さは 4ℓ となるので、ℓ の値を求めればよいです。第 1 象限にある弧は、パラメータ θ を用いて、次のように表示できます。

$$x = p\cos\theta, \quad y = q\sin\theta, \qquad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

このとき、弧長を求める公式を用いると、

$$\ell = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = q\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2\sin^2\theta}\, d\theta$$

ここで、$k = \sqrt{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^2}$ としました。$0 < p < q$ より、$0 < k < 1$ となります。

ここで、$0 < k < 1$ を満たす実数 k に対して、

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2\sin^2\theta}\, d\theta$$

とします。$E(k)$ を**第 2 種完全楕円積分**といいます。また、$0 < k < 1$ を満たす実数 k に対して、

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\theta}}\, d\theta$$

を**第 1 種完全楕円積分**といいます。

定理 1　次が成り立ちます。

$$\frac{dE(k)}{dk} = \frac{E(k)-K(k)}{k}, \qquad \frac{dK(k)}{dk} = \frac{E(k)}{(1-k^2)k} - \frac{K(k)}{k}$$

証明

$$\begin{aligned}
\frac{dE(k)}{k} &= \frac{d}{dk}\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\frac{\partial}{\partial k}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\frac{-k\sin^2\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}d\theta \\
&= \frac{1}{k}\int_0^{\pi/2}\frac{1-k^2\sin^2\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}d\theta - \frac{1}{k}\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \frac{E(k)-K(k)}{k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dK(k)}{k} &= \frac{d}{dk}\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \int_0^{\pi/2}\frac{\partial}{\partial k}\left(\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\right)d\theta = \int_0^{\pi/2}\frac{k\sin^2\theta\,d\theta}{(1-k^2\sin^2\theta)^{3/2}} \\
&= \int_0^{\pi/2}\frac{k}{1-k^2}\frac{d}{d\theta}\left(-\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\right)\sin\theta\,d\theta \\
&= \frac{k}{1-k^2}\left[-\frac{\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\right]_0^{\pi/2} + \frac{k}{1-k^2}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}d\theta \\
&= \frac{k}{1-k^2}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{k^2}\frac{1-k^2\sin^2\theta-(1-k^2)}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}d\theta \\
&= \frac{1}{k(1-k^2)}\left(\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta - (1-k^2)\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}d\theta\right) \\
&= \frac{1}{k(1-k^2)}(E(k)-(1-k^2)K(k))
\end{aligned}$$

□

$a>b>0$ のとき、$T(a,b)$ を

$$T(a,b) = \int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}}$$

と定義します。

補題 1　次が成り立ちます。

$$T(a,b) = T\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right)$$

証明

$$T(a,b) = \int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2\tan^2\theta}}\frac{d\theta}{\cos\theta}$$

$u = b\tan\theta$ と置換します。このとき、

$$\frac{du}{d\theta} = b\frac{1}{\cos^2\theta} = b(1+\tan^2\theta) = b + \frac{u^2}{b}$$

より、

$$d\theta = \frac{b}{b^2+u^2}du$$

また、
$$\cos^2\theta = \frac{1}{1+\tan^2\theta} = \frac{b^2}{b^2+u^2}$$
より
$$\cos\theta = \frac{b}{\sqrt{b^2+u^2}}$$
よって、
$$T(a,b) = \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{(a^2+u^2)(b^2+u^2)}}$$
従って、
$$T\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{du}{\sqrt{\left\{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+u^2\right\}(ab+u^2)}}$$
$u = \frac{1}{2}(v - \frac{ab}{v})$ と置換します。v が 0 から ∞ まで動くとき、u は $-\infty$ から ∞ まで単調に増加します。また、
$$\frac{du}{dv} = \frac{ab+v^2}{2v^2}$$
より、
$$du = \frac{ab+v^2}{2v^2}dv$$
また、
$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + u^2 = \frac{(a^2+v^2)(b^2+v^2)}{4v^2}, \quad ab+u^2 = \frac{(ab+v^2)^2}{4v^2}$$
よって、
$$T\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = \int_0^\infty \frac{dv}{\sqrt{(a^2+v^2)(b^2+v^2)}}$$
よって、補題 1 の式が成り立ちます。

□

補題 2　$a > b > 0$ のとき、次が成り立ちます。
$$T(a,b) = \frac{1}{a}K\left(\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}\right)$$

問 1 補題 *2* が成り立つことを確認してみよう。

補題 3　$0 < k < 1$ のとき、次が成り立ちます。
$$K(k) = \frac{2}{1+\sqrt{1-k^2}}K\left(\frac{1-\sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1-k^2}}\right)$$

証明　補題 2 において、$a=1,\ b=\sqrt{1-k^2}$ と置くと、

$$T(1,\sqrt{1-k^2})=K(k)$$

となります。補題 1 より、

$$T(1,\sqrt{1-k^2})=T\left(\frac{1+\sqrt{1-k^2}}{2},(1-k^2)^{1/4}\right)$$

補題 2 より、

$$T\left(\frac{1+\sqrt{1-k^2}}{2},(1-k^2)^{1/4}\right)=\frac{2}{1+\sqrt{1-k^2}}K\left(\frac{1-\sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1-k^2}}\right)$$

よって、補題 3 の式が成り立ちます。

□

補題 4　$0<k<1$ のとき、次が成り立ちます。

$$E(k)=\left(1+\sqrt{1-k^2}\right)E\left(\frac{1-\sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1-k^2}}\right)-\sqrt{1-k^2}K(k)$$

証明　$k'=\sqrt{1-k^2},\ \ell=\dfrac{1-k'}{1+k'}$ とおきます。k',ℓ を k について微分すると、

$$\frac{dk'}{dk}=-\frac{k}{k'}$$

$$\frac{d\ell}{dk}=\frac{d\ell}{dk'}\frac{dk'}{dk}=\frac{2k^2}{(1+k')^2k'k}=\frac{2\ell}{kk'}$$

補題 3 より、

$$(1+k')K(k)=2K(\ell)$$

両辺を k で微分すると、

$$(1+k')\frac{d}{dk}K(k)+\frac{dk'}{dk}K(k)=2\frac{d}{d\ell}K(\ell)\frac{d\ell}{dk} \tag{1}$$

定理 1 より、(1) の左辺は、

$$\frac{1+k'}{kk'^2}(E(k)-k'^2K(k))-\frac{k}{k'}K(k) \tag{2}$$

定理 1 より、(1) の右辺は、

$$4\frac{E(\ell)}{(1-\ell^2)kk'}-4\frac{K(\ell)}{kk'}$$

ここで、

$$1-\ell^2=1-\frac{(1-k')^2}{(1+k')^2}=\frac{4k'}{(1+k')^2}$$

よって、

$$4\frac{E(\ell)}{(1-\ell^2)kk'}=\frac{(1+k')^2}{k'^2k}E(\ell)$$

補題 3 より、

$$\frac{4}{kk'}K(\ell) = 2\frac{1+k'}{kk'}K(k)$$

よって、(1) の右辺は、

$$\frac{(1+k')^2}{kk'^2}E(\ell) - \frac{2(1+k')}{kk'}K(k) \tag{3}$$

(2) と (3) より、$E(k)$ について整理すると、補題 4 の式を得ます。

□

$a > b > 0$ のとき、

$$\mathcal{E}(a,b) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}\, d\theta$$

とおきます。

補題 5　$a > b > 0$ のとき、次が成り立ちます。

$$\mathcal{E}(a,b) = aE\left(\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}\right)$$

問 2 補題 5 が成り立つことを確認してみよう。

補題 6　$a > b > 0$ のとき、次が成り立ちます。

$$2\mathcal{E}\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) - \mathcal{E}(a,b) = abT(a,b)$$

証明　具体的に計算すると、

$$\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\right)^2} = \frac{a-b}{a+b}$$

となることが分かります。よって、補題 5 より、

$$\mathcal{E}\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = \frac{a+b}{2}E\left(\frac{a-b}{a+b}\right) \tag{4}$$

となります。$k = \sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}$ とおきます。このとき、$\sqrt{1-k^2} = b/a$ となるので、

$$\frac{1-\sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1-k^2}} = \frac{a-b}{a+b}$$

が成り立ちます。よって、

$$\frac{a+b}{2}E\left(\frac{a-b}{a+b}\right) = \frac{a+b}{2}E\left(\frac{1-\sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1-k^2}}\right) \tag{5}$$

(4) と (5) より、

$$\mathcal{E}\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = \frac{a+b}{2} E\left(\frac{1-\sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1-k^2}}\right)$$

一方、補題 5 より、$\mathcal{E}(a,b) = aE(k)$ となります。よって、

$$2\mathcal{E}\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) - \mathcal{E}(a,b) = (a+b)E\left(\frac{1-\sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1-k^2}}\right) - aE(k) \tag{6}$$

補題 4 より、

$$E\left(\frac{1-\sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1-k^2}}\right) = \frac{E(k)+\sqrt{1-k^2}K(k)}{1+\sqrt{1-k^2}} \tag{7}$$

$\sqrt{1-k^2} = b/a$ であるから、

$$\frac{E(k)+\sqrt{1-k^2}K(k)}{1+\sqrt{1-k^2}} = \frac{aE(k)+bK(k)}{a+b} \tag{8}$$

(6) と (7) と (8) より、

$$2\mathcal{E}\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) - \mathcal{E}(a,b) = bK(k) = abT(a,b)$$

最後の等式は、補題 2 を用いました。

□

2　算術幾何平均

$0 \leq b \leq a$ を満たす実数 a, b に対して、数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を次で定義します。

$$a_0 = a, \quad b_0 = b, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{9}$$

補題 7　任意の $n \geq 0$ に対して、$b_n \leq a_n$ が成り立ちます。

証明　数学的帰納法で示します。$n = 0$ のときは、定義より $b_0 \leq a_0$ となります。$n = k$ のとき $b_k \leq a_k$ が成り立つとします。

$$a_{k+1} - b_{k+1} = \frac{a_k + b_k}{2} - \sqrt{a_k b_k} = \frac{(\sqrt{a_k} - \sqrt{b_k})^2}{2} \geq 0$$

となるので、$n = k+1$ のときも主張が成り立ちます。よって、任意の $n \geq 0$ に対して、$b_n \leq a_n$ が成り立ちます。

□

補題 8　任意の $n \geq 0$ に対して、$a_{n+1} \leq a_n, \ b_n \leq b_{n+1}$ が成り立ちます。

証明　補題 7 より、

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{a_n - b_n}{2} \geq 0$$

$$b_{n+1} - b_n = \sqrt{a_n b_n} - b_n = \sqrt{b_n}(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}) \geq 0$$

となり、題意は成り立ちます。

$\square$

補題7, 8より、

$$b = b_0 \leq b_1 \leq \cdots \leq b_n \leq a_n \leq \cdots \leq a_1 \leq a_0 = a$$

となります。有界な単調数列は収束するので、数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ は $n \to \infty$ のときに収束します。a_n の極限値を α、b_n の極限値を β とします。$\beta \leq \alpha$ となります。$c_n = \sqrt{a_n^2 - b_n^2}$ とします。

補題 9　任意の $n \geq 1$ に対して、

$$0 \leq c_n \leq \frac{c_0}{2^n}$$

証明　まず、$n \geq 1$ において、

$$c_n = \sqrt{a_n^2 - b_n^2} = \sqrt{\left(\frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}\right)^2 - a_{n-1}b_{n-1}} = \sqrt{\frac{(a_{n-1} - b_{n-1})^2}{4}} = \frac{a_{n-1} - b_{n-1}}{2}$$

が成り立ちます。上の式で $n = 1$ とすると、

$$c_1 = \frac{a_0 - b_0}{2} = \frac{a - b}{2} \leq \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2} = \frac{c_0}{2}$$

また、$\{b_n\}$ は単調増加な数列であることを用いると、$n \geq 2$ において次の不等式が成り立ちます。

$$c_n = \frac{a_{n-1} - b_{n-1}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{a_{n-2} + b_{n-2}}{2} - b_{n-1}\right) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{a_{n-2} + b_{n-2}}{2} - b_{n-2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{a_{n-2} - b_{n-2}}{2}\right) = \frac{c_{n-1}}{2}$$

よって、

$$0 \leq c_n \leq \frac{c_{n-1}}{2} \leq \frac{c_{n-2}}{2^2} \leq \cdots \leq \frac{c_0}{2^n}$$

$\square$

補題9より、$n \to \infty$ のとき、$c_n \to 0$ となるので、$\beta = \alpha$ であることが分かります。α は a, b から定まる実数であり、これを $\mathrm{AGM}(a, b)$ と書きます。a_n, b_n が $\mathrm{AGM}(a, b)$ に収束する速度は非常に高速であることが知られています。

問 3　$AGM(a, 0) = 0,\ AGM(a, a) = a$ であることを確かめてみよう。

命題 1　$a > 0$ のとき、$AGM(a, b) = aAGM(1, b/a)$ が成り立ちます。

証明

$$a_1 = \frac{a + b}{2},\ \ b_1 = \sqrt{ab},\ \ a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2},\ \ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n},\ \ n = 1, 2, \ldots$$

とします。また、

$$c_1 = \frac{1 + b/a}{2},\ \ d_1 = \sqrt{1 \cdot \frac{b}{a}},\ \ c_{n+1} = \frac{c_n + d_n}{2},\ \ d_{n+1} = \sqrt{c_n d_n},\ \ n = 1, 2, \ldots$$

とします。このとき、任意の自然数 n に対して、$a_n = ac_n,\ b_n = ad_n$ となることを数学的帰納法で示します。$n = 1$ のときは明らかに成り立ちます。$n = k$ のとき成り立つとします。

$$a_{k+1} = \frac{a_k + b_k}{2} = \frac{ac_k + ad_k}{2} = a\frac{c_k + d_k}{2} = ac_{k+1}$$

$$b_{k+1} = \sqrt{a_k b_k} = \sqrt{ac_k ad_k} = a\sqrt{c_k d_k} = ad_{k+1}$$

よって、$n = k+1$ のときも成り立ちます。以上より、任意の自然数 n に対して、$a_n = ac_n,\ b_n = ad_n$ となることが分かりました。よって、

$$\mathrm{AGM}(a,b) = \lim_{n\to\infty} a_n = a \lim_{n\to\infty} c_n = a\mathrm{AGM}(1, b/a)$$

□

3 円周率、楕円積分、算術幾何平均の関係

ガウスは次の定理を示しました。

定理 2 $0 < k < 1$ のとき、次が成り立ちます。

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{AGM(1, \sqrt{1-k^2})}$$

円周率、楕円積分、算術幾何平均が結びついた大変きれいな定理です。この定理を示します。

証明 $a = 1, b = \sqrt{1-k^2}$ としたとき、(9) のように a_n, b_n を定義します。$\alpha = \mathrm{AGM}(1, \sqrt{1-k^2})$ とします。$n \to \infty$ のとき、$a_n, b_n \to \alpha$ となります。補題 1 と補題 2 より、

$$\begin{aligned} K(k) &= T(1, \sqrt{1-k^2}) = T(a_1, b_1) = T(a_2, b_2) = \cdots = T(\alpha, \alpha) \\ &= \frac{1}{\alpha}\int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\mathrm{AGM}(1, \sqrt{1-k^2})} \end{aligned}$$

□

4 円周率の超高速計算法

算術幾何平均を用いることで、円周率を非常に高速に計算する公式を導くことができます。この公式を示すために次の命題を用います。

命題 2 *(ルジャンドルの関係式)* 任意の $0 < k < 1$ に対して、次が成り立ちます。

$$\frac{E(k)}{K(k)} + \frac{E(\sqrt{1-k^2})}{K(\sqrt{1-k^2})} - 1 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{K(k)K(\sqrt{1-k^2})}$$

証明 $k' = \sqrt{1-k^2}$ とします。

$$(E(k) - K(k))K(k') + E(k')K(k) = \frac{\pi}{2} \tag{10}$$

を示します。

$$\frac{d}{dk}k' = -\frac{k}{k'}$$

が成り立ちます。また、$\sqrt{1-k'^2}=k$ が成り立ちます。定理 1 より、

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dk}\{(E(k)-K(k))K(k')+E(k')K(k)\} \\
=\ &\left(\frac{d}{dk}(E(k)-K(k))\right)K(k')+(E(k)-K(k))\frac{d}{dk}K(k')+\left(\frac{d}{dk}E(k')\right)K(k)+E(k')\frac{d}{dk}K(k) \\
=\ &\left(\frac{E(k)-K(k)}{k}-\frac{E(k)-k'^2K(k)}{kk'^2}\right)K(k')+(E(k)-K(k))\frac{E(k')-k^2K(k')}{k'k^2}\left(-\frac{k}{k'}\right) \\
&+\frac{E(k')-K(k')}{k'}\left(-\frac{k}{k'}\right)K(k)+E(k')\frac{E(k)-k'^2K(k)}{kk'^2}=0
\end{aligned}$$

よって、$(E(k)-K(k))K(k')+E(k')K(k)$ は k によらず一定です。

$$K(0)=E(0)=\frac{\pi}{2},\quad E(1)=1$$

が成り立ちます。$0<k<1$ のとき、$E(k)\leq K(k)$ が成り立ちます。よって、$0<k<1$ のとき、

$$\begin{aligned}
0\ &\leq\ (K(k)-E(k))K(k')=\left(\int_0^{\pi/2}\frac{k^2\sin^2\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\,d\theta\right)\left(\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos^2\theta+k^2\sin^2\theta}}\right) \\
&\leq\ k\left(\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\,d\theta\right)\left(\int_0^{\pi/2}\frac{kd\theta}{\sqrt{k^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}}\right)\leq k\cdot K(k)\cdot\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

$k\to 0$ とすると、$k\cdot K(k)\cdot\frac{\pi}{2}\to 0$ となります。よって、

$$\lim_{k\to 0}(K(k)-E(k))K(k')=0$$

となります。よって、

$$\lim_{k\to 0}\{(K(k)-E(k))K(k')+E(k')K(k)\}=E(1)K(0)=\frac{\pi}{2}$$

よって、(10) が成り立ちます。(10) の両辺を $K(k)K(k')$ で割ると求める式を得ます。

□

命題 3 　$0<k<1$ とします。$a=1, b=\sqrt{1-k^2}$ としたとき、*(9)* のように a_n, b_n を定義します。$c_n=\sqrt{a_n^2-b_n^2}$ とします。このとき、次が成り立ちます。

$$\frac{E(k)}{K(k)}=1-\sum_{n=0}^{\infty}2^{n-1}c_n^2$$

証明 　補題 1 と補題 6 より、

$$\begin{aligned}
&2^{n+1}(\mathcal{E}(a_{n+1},b_{n+1})-a_{n+1}^2T(a_{n+1},b_{n+1}))-2^n(\mathcal{E}(a_n,b_n)-a_n^2T(a_n,b_n)) \\
=\ &2^n(2\mathcal{E}(a_{n+1},b_{n+1})-\mathcal{E}(a_n,b_n))+(2^na_n^2-2^{n+1}a_{n+1}^2)T(a_n,b_n) \\
=\ &2^{n-1}(2a_nb_n-4a_{n+1}^2+2a_n^2)T(a_n,b_n)=2^{n-1}(a_n^2-b_n^2)T(a_n,b_n)=2^{n-1}c_n^2K(k)
\end{aligned}$$

最後の等式は、任意の自然数 n に対して、

$$T(a_n,b_n)=T(a_{n-1},b_{n-1})=\cdots=T(a,b)=K(k) \tag{11}$$

が成り立つことを用いました。$T(a,b)=K(k)$ は補題 2 から従います。

$$2^{n+1}(\mathcal{E}(a_{n+1},b_{n+1})-a_{n+1}^2T(a_{n+1},b_{n+1}))-2^n(\mathcal{E}(a_n,b_n)-a_n^2T(a_n,b_n))=2^{n-1}c_n^2K(k)$$

を $n=0,\dots,N-1$ に対して加えた後、両辺を -1 倍すると、

$$-2^N(\mathcal{E}(a_N,b_N)-a_N^2T(a_N,b_N))+E(k)-K(k)=-\sum_{n=0}^{N-1}2^{n-1}c_n^2K(k) \tag{12}$$

となります。ここで、補題 2 と補題 5 を用いました。また、

$$\begin{aligned}
&-2^N(\mathcal{E}(a_N,b_N)-a_N^2T(a_N,b_N))\\
=\;&2^N\left(\int_0^{\pi/2}\frac{a_N^2}{\sqrt{a_N^2\cos^2\theta+b_N^2\sin^2\theta}}\,d\theta-\int_0^{\pi/2}\sqrt{a_N^2\cos^2\theta+b_N^2\sin^2\theta}\,d\theta\right)\\
=\;&2^N\int_0^{\pi/2}\frac{c_N^2\sin^2\theta}{\sqrt{a_N^2\cos^2\theta+b_N^2\sin^2\theta}}\,d\theta
\end{aligned}\tag{13}$$

となります。(13) より、

$$0\le -2^N(\mathcal{E}(a_N,b_N)-a_N^2T(a_N,b_N))$$

となることが分かります。また、

$$2^N\int_0^{\pi/2}\frac{c_N^2\sin^2\theta}{\sqrt{a_N^2\cos^2\theta+b_N^2\sin^2\theta}}\,d\theta\le 2^Nc_N^2T(a_N,b_N)$$

となります。補題 9 と (11) より、

$$2^Nc_N^2T(a_N,b_N)\le\frac{c_0^2}{2^N}T(a_N,b_N)=\frac{c_0^2}{2^N}K(k)$$

となります。よって、

$$-2^N(\mathcal{E}(a_N,b_N)-a_N^2T(a_N,b_N))\le\frac{c_0^2}{2^N}K(k)$$

となることが分かります。以上より、

$$0\le -2^N(\mathcal{E}(a_N,b_N)-a_N^2T(a_N,b_N))\le\frac{c_0^2}{2^N}K(k)$$

となります。この式において、$N\to\infty$ とすると、

$$-2^N(\mathcal{E}(a_N,b_N)-a_N^2T(a_N,b_N))\to 0$$

となることが分かります。よって、(12) において、$N\to\infty$ とすると、

$$E(k)-K(k)=-\sum_{n=0}^{\infty}2^{n-1}c_n^2K(k)$$

この式の両辺を $K(k)$ で割ると証明したい式を得ます。

□

定理 3 *(ガウスの公式)* $a=1, b=1/\sqrt{2}$ としたとき、*(9)* のように a_n, b_n を定義します。$c_n=\sqrt{a_n^2-b_n^2}$ とします。このとき次が成り立ちます。

$$\pi=\frac{2AGM\left(1,1/\sqrt{2}\right)^2}{1-\sum_{n=0}^{\infty}2^nc_n^2}$$

証明　命題 2 において、$k=1/\sqrt{2}$ とおき、両辺に $\pi/2$ を掛けると、

$$\frac{\pi}{2}\left(2\frac{E\left(1/\sqrt{2}\right)}{K\left(1/\sqrt{2}\right)}-1\right)=\left(\frac{\pi}{2K\left(1/\sqrt{2}\right)}\right)^2$$

定理 2 と命題 3 より、

$$\frac{\pi}{2}\left(1-\sum_{n=0}^{\infty}2^nc_n^2\right)=\mathrm{AGM}\left(1,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

よって、定理の式を得ます。

□

5　ガウスの公式による円周率の近似計算

$a=1, b=1/\sqrt{2}$ としたとき、(9) によって a_n, b_n を定義します。このとき、

$$\lim_{N\to\infty}a_N=\mathrm{AGM}\left(1,1/\sqrt{2}\right)$$

が成り立ちます。

$$p_N=\frac{2a_N^2}{1-\sum_{n=0}^{N}2^nc_n^2}$$

とします。定理 3 より、

$$\lim_{N\to\infty}p_N=\pi$$

となります。よって、N が十分大きいとき、p_N は π の近似値になります。実際、p_0, p_1, p_2, p_3, p_4 を計算すると以下のようになります。

p_0	4. 00000 00000 00000 00000
p_1	3. 18767 26427 12108 62720
p_2	3. 14168 02932 97653 29391
p_3	3. 14159 26538 95446 49600
p_4	3. 14159 26535 89793 23846
π	3. 14159 26535 89793 23846

p_3 は 9 桁まで、p_4 は 20 桁まで π と一致しています。そして、p_7 を計算すれば、100 桁まで π と一致します。算術幾何平均を用いた円周率の近似法はこのように非常に高精度です。

参考文献

[1] 奥井重彦、「電子通信工学のための特殊関数とその応用」、森北出版株式会社

[2] 四ツ谷晶二、村井実、「楕円関数と仲良くなろう」、日本評論社